CIENCIA Y SOCIEDAD
Volumen XIX, Número 3, Julio-Septiembre, 1994
Volumen XIX, Número 4, Octubre-Diciembre, 1994

ALGUNAS CARACTERISTICAS DEL "PROBLEMA CARACTERISTICO"

Ing. Daniel Comarazamy*

Resumen:

Se realza la importancia del álgebra matricial en ingeniería, mediante el estudio de los eigenvalues o valores característicos de una matriz diagonal. Se aplica este tipo de soluciones a la transformación de ecuaciones de secciones cónicas a formas canónicas.

Palabras Claves:

Ingeniería, problema, álgebra matricial, eigenvalues, eigenvectors, cónicas, transformaciones canónicas.

* El Ing. Daniel Comarazamy, Magister en Ingeniería de Estructuras, es el Director del Area de Ingeniería Civil en el INTEC.

Muchos casos prácticos de ingeniería, en donde se tratan problemas de dinámica de estructuras, elasticidad, vibraciones, flujo de corriente eléctrica, etc..., pueden ser modelados matemáticamente mediante el llamado Problema Característico de una Matriz.

La aplicación de dicho problema no sólo se circunscribe a la ingeniería pura, sino que tiene usos muy importantes dentro de la propia matemática, como es el caso a que haremos referencia mas adelante.

La siguiente relación

$$[A]\,\{\phi\} = \{b\}$$

es la ecuación clásica que define la naturaleza práctica de una matriz como "un operador que transforma a un vector".

Ahora bien, si del vector de mano derecha, $\{b\}$ pudiéramos extraer un valor escalar λ, de tal forma que el nuevo vector resultante fuera el mismo vector a transformar, tendríamos la siguiente ecuación:

$$[A]\,\{\phi\} = \lambda\{\phi\} \quad \text{(Ec. 1)}$$

en otras palabras, estaríamos afectando la magnitud del vector, pero no así su dirección ni su línea de acción.

$$[A]\,\{\phi\} - \lambda\{\phi\} = 0$$

$$(\,[A] - \lambda[I]\,)\,\{\phi\} = 0$$

esta relación tiene dos soluciones: primero la llamada "solución trivial" en la que $\{\phi\} = 0$, y segundo, en la que el determinante del premultiplicador es igual a cero:

$$\left|\,[A] - \lambda[I]\,\right| = 0$$

El desarrollo de este determinante nos conduce a la Ecuación

Característica cuya solución nos dará los distintos valores de λ que afectan a cada vector de la matriz transformada.

Estos valores se conocen como Valores Característicos o Propios (eigenvalues) que se pueden agrupar en una matriz diagonal que usualmente recibe el nombre de Matriz Espectral por la semejanza que presenta con el problema de Dinámica de Estructuras. Tendremos tantos Valores Característicos como vectores tenga la matriz, en otras palabras, el orden de la matriz determina el número de Valores Propios o Autovalores.

Cada vector afectado recibe el nombre de Vector Característico o Propio (eigenvector).

Veamos ahora la aplicación de este tipo de solución a un problema de matemáticas, como es el de transformar la ecuación general de una sección cónica a una Forma Canónica.

La ecuación general de dicha sección viene dada por la siguiente expresión:

$$Ax_1^2 + Bx_1x_2 + Cx_2^2 + Dx_1 + Ex_2 + F = 0$$

sin embargo, para efectos de notación matricial resulta mas conveniente la siguiente formulación:

$$ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 + 2dx_1 + 2ex_2 + f = 0$$

llamada, comunmente, la forma no–canónica de una sección cónica.

La presencia de los términos lineales $2dx_1$ y $2ex_2$ implica que el centro de la sección no coincide con el origen de coordenadas del sistema global elegido "a priori"; y el término cruzado, $2bx_1x_2$, indica que la orientación local de la sección no es la misma que la de los ejes globales.

Expresado en forma matricial tenemos,

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\{x\}^T[A_X]\{x\} = 0$$

Ambos problemas pueden ser resueltos efectuando, primero, una traslación de coordenadas y luego una rotación de los ejes del sistema. Al final sólo tendremos los términos cuadrados y constante de la ecuación. Esta ecuación final recibe el nombre de forma canónica de la sección cónica.

Matricialmente esto implica la anulación de todos los términos de la matriz con excepción de aquellos localizados en la diagonal principal.

Iniciemos nuestra búsqueda formulando la matriz de transformación de coordenadas por traslación (ver figura 1).

$$x_1 = y_1 + u$$

$$x_2 = y_2 + v$$

Matricialmente se expresa de esta manera:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & u \\ 0 & 1 & v \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \{x\} = [T]\{y\}$$

donde [T] representa la matriz de transformación de coordenadas por traslación, teniendo la propiedad de no-similaridad, es decir que

$[T]^T \neq [T]^{-1}$. La transformación se efectúa mediante el triple producto matricial que es típico de las cantidades tensoriales: $[A_Y] = [T]^T[A_X][T]$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ u & v & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & u \\ 0 & 1 & v \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & (au+bv+d) \\ b & c & (bu+cv+e) \\ (au+bv+d) & (bu+cv+e) & k \end{bmatrix}$$

donde $k = au^2 + 2buv + cv^2 + 2du + 2ev + f$ (Ec. 2)

La transformación se lleva a cabo haciendo nulos los términos (1,3), (2,3), (3,1) y (3,2);

$au + bv + d = 0$; $bu + cv + e = 0$ de donde obtenemos,

$u = (be - dc)/(ac - b^2)$ y $v = (bd - ae)/(ac - b^2)$

Es necesario hacer notar que el denominador de estas dos expresiones no es otra cosa que el determinante (Δ) del menor superior y que tiene una importancia extrema: por ejemplo, si el $\Delta = 0$, la sección en cuestión no tiene centro y se trata de una parábola; si el $\Delta > 0$, se trata de una elipse y, si $\Delta < 0$ estamos hablando de una hipérbola. En realidad, sería necesario el verificar el otro invariante que se refiere al determinante de tercer orden del sistema a fin de comprobar que se trata de una sección cónica como tal.

Simplificando la expresión de k en la Ec. 2, tenemos que

$k = du + ev + f$

La forma final será:

$\{y\}^T [A_Y] \{y\} = 0$

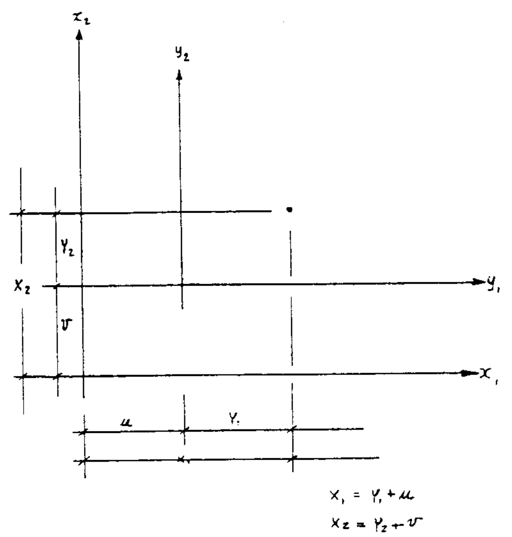


FIGURA 1

$$[y_1 \quad y_2 \quad 1] \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ b & c & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

Expresado en notación algebraica:

$$ay_1^2 + 2by_1y_2 + cy_2^2 + k = 0$$

La segunda transformación se consigue operando sobre la nueva matriz a través de una matriz de rotación de coordenadas (ver figura 2).

$$y_1 = z_1 \cos\theta - z_2 \operatorname{sen}\theta$$

$$y_2 = z_1 \operatorname{sen}\theta + z_2 \cos\theta$$

las que expresadas matricialmente nos resultan,

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \qquad \{y\} = [R]\{z\}$$

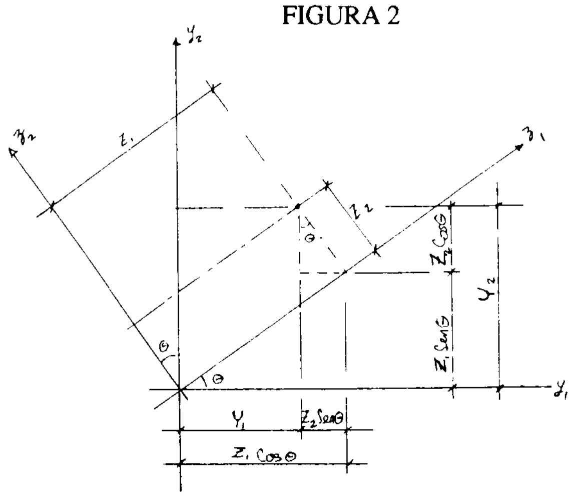
donde, la transformación matricial sería:

$$[A_Z] = [R]^T \, [A_Y] \, [R]$$

Esta transformación nos asegura la eliminación de los términos cruzados localizados en las posiciones (1,2) y (2,1) lo que en realidad indica que estaríamos diagonalizando la matriz final.

Sin embargo, esta última transformación por rotación la efectuaremos presentando el problema característico de la matriz.

FIGURA 2



$$Y_1 = Z_1 \cos\theta - Z_2 \,\text{Sen}\theta$$
$$Y_2 = Z_1 \,\text{Sen}\theta + Z_2 \cos\theta$$

Veamos a continuación el siguiente ejemplo:

$$2x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2 - 2x_1 + 3x_2 - 6 = 0$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1.5 \\ -1 & 1.5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Delta = ac - b^2 = 2(-1) - 2^2 = -6$$

Se trata de una hipérbola, con centro en las coordenadas de posición (u,v)

$$u = [2(1.5) - (-1)(-1)] / (-6) = -.3333$$

$$v = [2(-1) - 2(1.5)] / (-6) = .8333$$

$$k = (-1)(-.3333) + 1.5(.8333) + (-6) = -4.4168$$

La primera transformación, que envuelve una traslación de ejes, queda efectuada así,

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4.4168 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

o expresado algebráicamente:

$$2y_1^2 + 4y_1y_2 - y_2^2 = 4.4168$$

dividiendo entre 4.4168,

$$.4528y_1^2 + .9056y_1y_2 - .2264y_2^2 = 1$$

Esta nueva ecuación la podemos expresar matricialmente

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .4528 & .4528 \\ .4528 & -.2264 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 1 \quad \text{(Ec. 3)}$$

ahora planteamos el problema característico:

$$\begin{bmatrix} .4528 & .4528 \\ .4528 & -.2264 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \{\emptyset\} = 0$$

efectuando la operación correspondiente arribamos a la ecuación siguiente,

$$\begin{bmatrix} (.4528 - \lambda) & .4528 \\ .4528 & (-.2264 - \lambda) \end{bmatrix} \{\emptyset\} = 0$$

de la cual ya expresamos que haciendo el determinante del premultiplicador igual a cero, obtendríamos una solución no–tri– vial del problema;

$$\begin{vmatrix} (.4528 - \lambda) & .4528 \\ .4528 & (-.2264 - \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

el desarrollo de este determinante de segundo orden nos conduce a la Ecuación Característica

$$\lambda^2 - .2264\,\lambda - .3075 = 0$$

cuya solución nos da los dos valores característicos:

$$\lambda_1 = .6792 \qquad \lambda_2 = -.4528$$

ahora, sustituyendo cada valor en la ecuación 1, obtendremos los vectores característicos.

$$\begin{bmatrix} .4528 & .4528 \\ .4528 & -.2264 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{bmatrix} = .6792 \begin{bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{bmatrix}$$

y,

$$\begin{bmatrix} .4528 & .4528 \\ .4528 & -.2264 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{bmatrix} = -.4528 \begin{bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{bmatrix}$$

Resolviendo cualquiera de las dos ecuaciones tendríamos el mismo resultado. Veamos el primer Valor $\lambda = .6792$

$$\begin{bmatrix} (.4528 \;\; -.6792) & .4528 \\ .4528 & (-.2264 - .6792) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -.2264 & .4528 \\ .4528 & -.9056 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{bmatrix} = 0$$

algebráicamente, $-.2264\phi_{11} + .4528\phi_{21} = 0$

Tal y como expresaramos en párrafos anteriores, el valor característico sólo afecta la magnitud del vector, no su dirección ni su línea de acción, lo que significa que el valor real de cada término del vector no es relevante, sino, la relación existente entre ellos, de ahí que le asignaremos un valor arbitrario a uno de ellos y el valor del otro término será relativo al primero.

El ángulo de rotación entre los ejes se obtiene así,

$\tan\theta = [\phi_{11}/\phi_{21}]$

Veamos:

si $\phi_{11} = 1.0$, entonces $\phi_{21} = 0.5$

de donde tenemos que $\theta = \tan^{-1}(0.5/1.0) = 26.565^{\circ}$

por otro lado, si agrupamos los valores característicos en una matriz diagonal, obtendremos los nuevos ejes de la sección cónica:

$$\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .6792 & 0 \\ 0 & -.4528 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = 1 \quad \text{(Ec. 4)}$$

es decir,

$(0.6792) * Z_1^2 - (0.4528) * Z_2^2 = 1$

o bien, llevado a su Forma Canónica,

$$\frac{Z_1^2}{(1.2134)^2} - \frac{Z_2^2}{(1.4861)^2} = 1$$

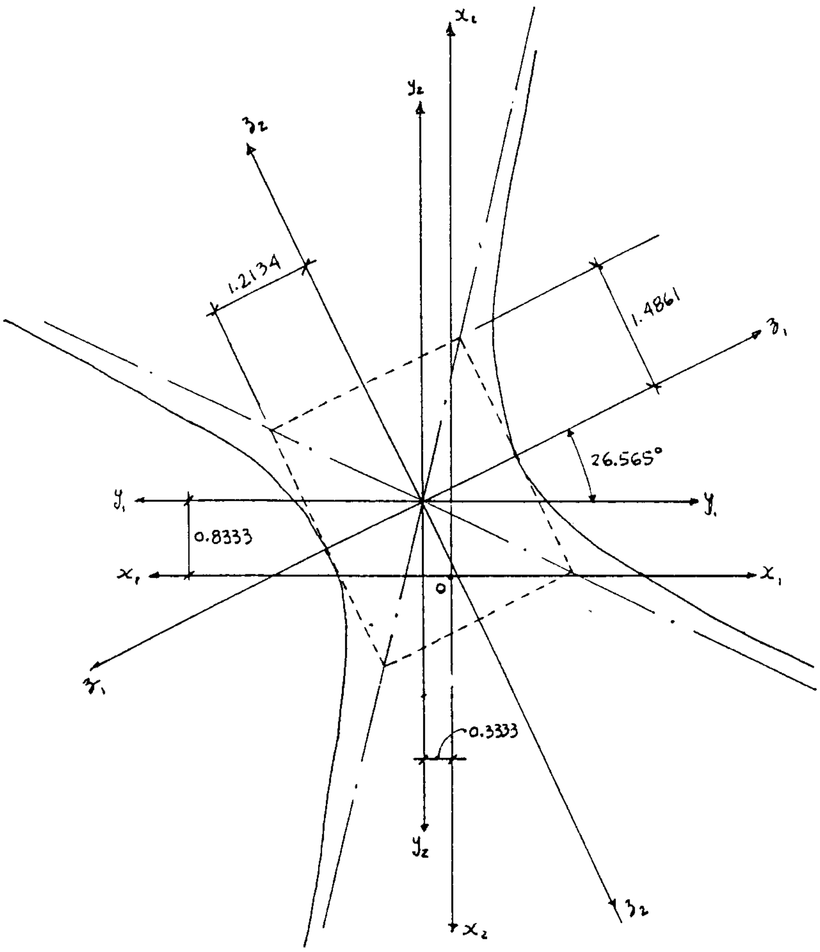


FIGURA 3

Conclusión

Esta presentación, es mas bien un trabajo de divulgación y no de investigación. Podría resultar más sencillo el recabar toda esta información en cualquiera de las referencias citadas al final, para tener una idea más clara y amplia sobre el tema. Tal vez, el enfoque matricial que hemos querido darle, pudiera tener algo de innovador, sin embargo, perseguimos, mediante estas pocas cuartillas el presentar al lector los siguientes puntos:

1– resaltar la importancia que tiene, para los ingenieros, el uso y manejo apropiado del algebra matricial, y,

2– hacer notar que el Problema Característico de una Matriz reviste una real importancia en la solución de problemas, no solamente de ingeniería, sino en cualquier rama del saber,

De todos modos debemos señalar que la aplicación del problema característico, *para el caso que nos ocupa, solamente se puede efectuar* en referencia a la rotación de los ejes, ya que la matriz que efectúa la transformación correspondiente, tiene caracter de similaridad, es decir que su transpuesta es igual a su inversa, lo cual no ocurre con la matriz de transformación de coordenadas por traslación.

También es importante observar que la suma de los Valores Característicos presentados en la Ec. 4, es igual a la traza de la matriz original (Ec. 3). Esta condición es uno de los invariantes del sistema.

Referencias

- *Matemáticas Superiores para Ingeniería*
  C. Ray Wylie
- *Cálculo Infinitesimal y Geometría Analítica*
  George Thomas
- *Análisis Matricial – (Notas de Cátedra)*
  Bernardo Deschapelles